Análise Matemática 2 D

Introdução às Séries Numéricas

Filipe Oliveira, 2011

Conteúdo

1 Introdução às séries numéricas

1.1 Prelúdio: O paradoxo de Aquiles e da tartaruga

Aquiles

Um dos mais famosos paradoxos de Zenão - filósofo grego da Antiguidade - é o problema de Aquiles e da tartaruga.

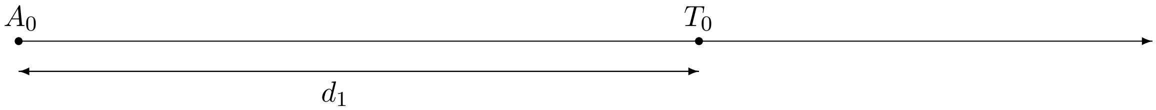
Aquiles, herói da guerra de Tróia, vai fazer uma corrida com uma tartaruga cuja velocidade é 5 vezes inferior à sua:

$$v_A = 5.v_T.$$

É concedido um avanço d_1 à tartaruga. No instante $t = 0$, ambos começam a correr no mesmo sentido.

Eis a posição inicial:

Instante $\mathbf{t} = 0$ ($\mathbf{A}_0$: posição de Aquiles; $\mathbf{T}_0$: posição da tartatuga)

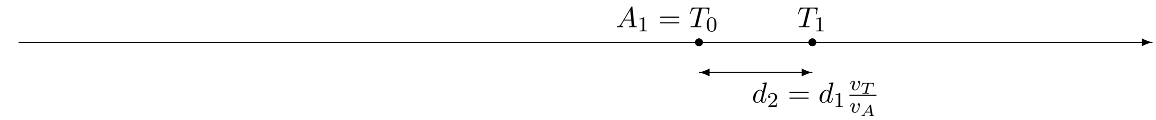


A corrida inicia-se.

Aquiles precisará de um tempo de $t_1 = \frac{d_1}{v_A}$ para atingir a posição inicial T_0 da tartaruga.

Naturalmente, ao atingir esta posição, a tartaruga já se encontra mais adiante: durante esse lapso de tempo, percorreu a distância $d_2 = v_T t_1 = d_1 \frac{v_T}{v_A}$.

Instante $\mathbf{t} = \mathbf{t_1} = \frac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{v_A}}$



Aquiles demorará agora $t_2 = \frac{d_2}{v_A} = t_1 \frac{v_T}{v_A}$ para atingir a nova posição T_1 da tartaruga.

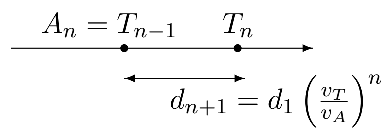
Uma vez mais, após esse desse lapso de tempo, a tartaruga já se encontra mais à frente: terá conseguido percorrer a distância $d_3 = v_T t_2 = d_2 \frac{v_T}{v_A} = d_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2$.

Instante $\mathbf{t = t_1 + t_2 = t_1 + t_1 \frac{v_T}{v_A}}$

É certo que a distância que os separa vai sendo reduzida drasticamente...mas também é certo que este é um processo infinito: sempre que Aquiles atingir a posição prévia da tartaruga, esta já se encontrará à frente, por muito pouco que seja.

Após repetição deste processo n vezes, temos a seguinte situação:

Instante $\mathbf{t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = t_1 + t_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right) + t_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \cdots + t_1 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1}}$



Zenão argumentava agora que não é possível Aquiles alcançar a tartaruga. Teria de passar por este processo uma infinidade de vezes, percorrendo uma distância igual à soma infinita de todas as distâncias d_n:

$$d_{Total} = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{100} + d_{101} + \cdots + d_{10000} + d_{100001} + \ldots$$

o que levaria um tempo total de

$$t_{Total} = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{100} + t_{101} + \cdots + t_{10000} + t_{100001} + \ldots$$

Estas duas quantidades, sendo iguais à soma de uma infinidade de parcelas todas elas estritamente positivas, são aparentemente infinitas. Com isto, Zenão pretendia demonstrar que todo o movimento é ilusão, pois no mundo real sabemos que Aquiles alcança facilmente a tartaruga.

Tal seria, de um ponto de vista lógico, impossível...

Nos capítulos seguintes iremos introduzir as ferramentas matemáticas necessárias à resolução deste paradoxo.

1.2 Sucessão das somas parciais

Definição 1.2.1 *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão.*
A sucessão de termo geral

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$$

diz-se ***sucessão das somas parciais*** *associada a* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ou seja, o N-ésimo termo da sucessão das somas parciais é simplesmente a soma dos N primeiros termos da sucessão original.
Por exemplo, tomando a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$, tem-se

$$S_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \ldots \text{etc} :$$

para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

Obter uma expressão explícita para S_N é, em geral, impossível. No entanto, tal pode ser conseguido nas seguintes situações já estudadas durante o Ensino Secundário:

1.2.1 Caso das sucessões aritméticas

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão aritmética de primeiro termo a e razão r, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a + (n-1)r.$$

Tem-se, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = N \times \frac{u_1 + u_N}{2} = N \times \frac{2a + (N-1)r}{2}.$$

Por não se tratar de um resultado importante no âmbito do estudo das séries numéricas (que definiremos mais adiante), não se apresenta uma prova deste resultado, que pode ser encontrada em qualquer bom manual do 11^o ano.

1.2.2 Caso das sucessões geométricas

Bem mais fundamental é o seguinte resultado, referente à sucessão das somas parciais de sucessões geométricas:

Teorema 1.2.2 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão geométrica de primeiro termo a e razão $r \neq 1$, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = ar^{n-1}.$$

Então, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = a\frac{1 - r^N}{1 - r}.$$

Deixou-se de fora o caso $r = 1$, por não se tratar de um caso interessante: nessa situação $u_n = a$ para todo n pelo que

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N = a + a + \cdots + a = Na.$$

Prova Por definição, $S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N = a(1 + r + r^2 + \ldots r^{N-1})$.
Assim,

$$\begin{aligned} S_N(1-r) &= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1})(1-r) \\ &= a[(1 + r + r^2 + \ldots r^{N-1}) - (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N)] \\ &= a(1 - r^N). \end{aligned}$$

Dividindo esta igualdade por $(1-r)$ obtêm-se o resultado pretendido.
Podemos realizar o mesmo cálculo de uma forma um pouco mais formal, envolvendo as propriedades dos somatórios. Dessa forma não precisamos de utilizar reticências (...), que podem por vezes causar alguma confusão:

$$\begin{aligned} S_N(1-r) &= (1-r)\sum_{n=1}^{N} ar^{n-1} = a(1-r)\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} = a\left(\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} - r\sum_{n=1}^{N} r^{n-1}\right) \\ &= a\left(\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} r^{n}\right) = a\left(\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} - \sum_{n=2}^{N+1} r^{n-1}\right) = a(1-r^N). \end{aligned}$$

■

1.2.3 Caso das sucessões telescópicas

Não existindo uma definição precisa, diz-se tradicionalmente que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **telescópica** (ou **de Mengoli**) se for conhecida explicitamente uma outra sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a_n - a_{n+1}.$$

Mengoli, 1626-1686

Por exemplo, as sucessões de termo geral:

- $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  (tomar $a_n = \frac{1}{n}$),
- $v_n = \sin(n+1) - \sin(n) = (-\sin(n)) - (-\sin(n+1))$
  (tomar $a_n = -\sin(n)$)
- $w_n = \ln\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n+1)$ (tomar $a_n = \frac{1}{2}\ln(n)$),

são sucessões telescópicas.

Tal como acontece para as sucessões aritméticas ou geométricas, o termo geral da sucessão das somas parciais associada a uma sucessão telescópica pode ser obtido explicitamente:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{N-2} - a_{N-1}) + (a_{N-1} - a_N) \\ &= a_1 - a_{N+1}. \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

De maneira mais geral, aproveitando este tipo de simplificações, é possível determinar explicitamente a sucessão das somas parciais de muitas outras sucessões, como por exemplo as da forma

$$u_n = a_n - a_{n+k}. \qquad (k \text{ inteiro fixo })$$

Não se apresenta aqui um resultado geral (apesar de ser possível fazê-lo). De facto, é bem menos confuso deduzi-lo caso a caso, utilizando as propriedades dos somatórios, como no exemplo que se segue:

Exemplo 1.2.3

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

1.3 Noção de série convergente

1.3.1 Um primeiro exemplo

Tomemos a sucessão geométrica de termo geral $u_n = \frac{1}{2^n}$ ($a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$):

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^N}.$$

O que acontece a esta igualdade se tomarmos o limite $N \to +\infty$?

Tem-se

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^N} = 1.$$

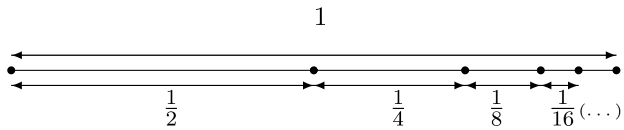
Isto significa que, de certa forma, se "somarmos a infinidade de parcelas"

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{101}} + \cdots + \frac{1}{2^{10000}} + \frac{1}{2^{10001}} + \dots$$

não obtemos uma quantidade infinita como poderíamos ingenuamente pensar. Obtemos simplesmente o valor 1. Escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Este resultado não é assim tão espantoso... É verdade que estamos num certo sentido a somar uma infinidade de parcelas estritamente positivas. Mas também é verdade que essas parcelas são cada vez mais pequenas. Aliás, este resultado é muito fácil de perceber intuitivamente: obtém-se uma boa ilustração desta igualdade tomando um segmento de comprimento 1 e dividindo-o sucessivamente ao meio.



1.3.2 Formalização da noção de série convergente

De maneira mais geral:

Definição 1.3.1 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão numérica e $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a respectiva sucessão das somas parciais. Diremos que*

- ***a série $\sum \mathbf{u_n}$ é convergente*** *se a sucessão $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é convergente, isto é,*

$$\lim_{N\to+\infty} S_N \in \mathbb{R}.$$

  *Nesse caso, denotamos a **soma da série** por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n := \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

- ***a série $\sum \mathbf{u_n}$ é divergente*** *se a sucessão $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é divergente, isto é,*

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{N\to+\infty} S_N \text{ não existe.}$$

Em rigor, o que se entende por "série" é o par ordenado de sucessões $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_N)_{N\in\mathbb{N}})$. No entanto, neste curso, apenas usaremos esta palavra no sentido da Definição 1.3.1.

Exemplo 1.3.2

- $\sum \frac{1}{2^n}$

  Como vimos, $S_N = 1 - \frac{1}{2^N}$: $\lim_{N\to\infty} S_N = 1$. Assim, a série $\sum \frac{1}{2^n}$ é convergente e tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

- $\sum(-1)^n$

  Nesta situação,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n = (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^N = \begin{cases} -1 & \textit{se } N \textit{ é ímpar} \\ 0 & \textit{se } N \textit{ é par} \end{cases}$$

  Logo, $\lim_{N\to+\infty} S_N$ *não existe:* *a série* $\sum(-1)^n$ *é divergente.*

- $\sum n$

  Aqui, $S_N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{n(n+1)}{2}$ *(sucessão aritmética de primeiro termo* 1 *e razão* 1*):* $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$ *e* *a série* $\sum n$ *é divergente.*

Naturalmente, podemos também determinar a natureza e a soma de uma série de tipo telescópica aproveitando o facto de conhecermos explicitamente o termo geral da sucessão das somas parciais:

Exemplo 1.3.3 *Vimos que* $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N}$*, pelo que* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *é convergente, e*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Da mesma forma, atendendo ao Exemplo 1.2.3,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

1.3.3 Séries geométricas

Como vimos, a expressão do termo geral da sucessão das somas parciais associada a uma sucessão geométrica pode ser determinada explicitamente. É por isso fácil determinar a natureza de uma série geométrica. O resultado, absolutamente essencial, encontra-se sintetizado no seguinte teorema:

Teorema 1.3.4
Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sucessão geométrica de primeiro termo* $a \neq 0$ *e de razão* $r \in \mathbb{R}$*. Então:*

- *Se* $|r| < 1$, $\sum u_n$ *é convergente, e tem-se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

- *Se* $|r| \geq 1$, $\sum u_n$ *é divergente.*

Retirou-se o caso $a = 0$, uma vez que nessa situação a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é identicamente nula, pelo que $\sum u_n$ é obviamente convergente.

Prova

- Se $|r| < 1$, $\lim\limits_{N\to+\infty} r^N = 0$: $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} a\dfrac{1-r^N}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$. Por definição, $\sum u_n$ converge e tem-se
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{a}{1-r}.$$

- Se $r = 1$, $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a = Na \xrightarrow[N\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0. \end{cases}$

  Se $r = -1$, $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -a & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

  Em ambos os casos, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ não é convergente. Por definição, a série $\sum u_n$ é divergente.

- Se $|r| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |r^n| = \lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = +\infty$.

  A sucessão das somas parciais, de termo geral $S_N = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$, não é convergente: $\sum u_n$ é divergente.

1.4 Epílogo: o paradoxo de Aquiles e da Tartaruga

Retomemos a expressão obtida para o tempo que levaria Aquiles a alcançar a tartaruga:

$$t_{Total} = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{100} + t_{101} + \cdots + t_{10000} + t_{100001} + \ldots$$

Sabemos agora dar um sentido a esta "soma infinita": trata-se da soma da série $\sum t_n$, caso esta seja convergente. Vimos que para todo n,

$$t_n = t_1 \times \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1}.$$

Trata-se de o termo geral da sucessão geométrica de primeiro termo $a = t_1$ e razão $r = \frac{v_T}{v_A}$.

A série é convergente se $|r| = \frac{v_T}{v_A} < 1$, isto é $v_T < v_A$, o que faz todo o sentido:
Aquiles alcança a tartaruga se e só se for mais rápido do que ela. Nesse caso,

$$t_{Total} = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n = \frac{a}{1-r} = \frac{d_1}{v_A - v_T}.$$

Por exemplo, tomando a distância inicial $d_1 = 100\,m$, $v_A = 10\,m \cdot s^{-1}$ e $v_T = 2\,m \cdot s^{-1}$, obtém-se $t_{Total} = 12,5\,s$.

2 Propriedades Gerais

2.1 Álgebra das séries convergentes

Propriedade 2.1.1 - Linearidade do sinal de soma

Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões numéricas.*
Se $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *são convergentes, então*

- $\sum u_n + v_n$ *é convergente e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$

- *Para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum(\lambda u_n)$ *é convergente e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$

Prova

- Basta observar que para todo $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{N} u_n + \sum_{n=1}^{N} v_n$, uma vez que se trata aqui de uma soma finita. Assim,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(u_n+v_n) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n,$$

  uma vez que $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são convergentes. Logo, $\sum(u_n+v_n)$ é convergente e tem-se a igualdade anunciada.

- A prova é análoga, bastando observar que para todo $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(\lambda u_n) = \lambda\sum_{n=1}^{N} u_n.$ ■

Exemplo 2.1.2 *Mostre que* $\displaystyle\sum \frac{3}{(-5)^n} + 2\arctan(n) - 2\arctan(n+1)$ *é convergente e determine a sua soma.*

- $\sum \frac{1}{(-5)^n} = \sum \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ é a série geométrica de primeiro termo $a = -\frac{1}{5}$ e razão $r = -\frac{1}{5}$.

  Como $|r| = \frac{1}{5} < 1$, esta série é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-5)^n} = \frac{a}{1-r} = -\frac{1}{6}.$$

- $\sum \arctan(n) - \arctan(n+1)$ é uma série telescópica:

$$\sum_{n=1}^{N} \arctan(n) - \arctan(n+1) = \arctan(1) - \arctan(N+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \arctan(1) - \frac{\pi}{2}.$$

  Trata-se pois de uma série convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(n) - \arctan(n+1) = \arctan(1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Por linearidade do sinal de soma, a série em estudo é convergente e

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{(-5)^n} + 2(\arctan(n) - \arctan(n+1)) &= 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-5)^n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(n) - \arctan(n+1) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

Eis um corolário desta propriedade que nos será bastante útil de futuro:

Corolário 2.1.3 *Seja $C \neq 0$.*
Então

$$\sum Cu_n \text{ é convergente } \Rightarrow \sum u_n \text{ é convergente }.$$

Prova Se $\sum Cu_n$ é convergente, pelo ponto anterior também o é a série $\sum \lambda(Cu_n)$ para qualquer valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomando $\lambda = \frac{1}{C}$,

$$\sum \frac{1}{\lambda}(\lambda u_n) = \boxed{\sum u_n \text{ é convergente}}$$

■

E o que dizer de da soma de uma série convergente e de uma divergente? E da soma de duas séries divergentes?

Propriedade 2.1.4 *Sejam Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões numéricas.*

- *Se $\sum u_n$ é convergente e $\sum v_n$ é divergente, $\sum u_n + v_n$ é divergente;*
- *Se $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são ambas divergentes, nada se pode afirmar à partida sobre a natureza de $\sum u_n + v_n$. Esta série poderá ser convergente ou divergente.*

Prova

- Se $\sum u_n$ é convergente e $\sum v_n$ é divergente:

  Vamos provar por redução ao absurdo que $\sum w_n$, onde $w_n = u_n + v_n$ é uma série divergente.

  De facto, se $\sum w_n$ fosse convergente, $\sum v_n = \sum w_n - u_n = \sum w_n + (-1)u_n$ seria uma série convergente pela Propriedade 2.1.1, o que contradiz a hipótese.

  Logo $\sum w_n = \sum u_n + v_n$ é obrigatoriamente divergente.

- Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão constante igual a 1: para todo n, $u_n = 1$.

  Tomando $v_n = -1$, $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são divergentes (as sucessões das somas parciais tendem respectivamente para $+\infty$ e $-\infty$). No entanto, $\sum(u_n + v_n) = \sum 0$ é uma série convergente.
  Tomando agora $v_n = 1$, $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são divergentes mas desta feita $\sum(u_n + v_n) = \sum 2$ é uma série divergente.

  Fica assim claro que somando duas séries divergentes tudo pode acontecer...

$\blacksquare$

2.2 Séries grosseiramente divergentes

Vimos que $\sum 1$ é uma série divergente. De facto, tomando $u_n = 1$ para todo n,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

Na realidade, uma condição necessária para que uma série seja convergente é que o seu termo geral tenda para 0:

Teorema 2.2.1 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão numérica. Então*

$$\sum u_n \text{ é convergente } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Observação Uma implicação $(A \Rightarrow B)$ e a sua contra-recíproca $(\sim B \Rightarrow \sim A)$ têm o mesmo valor lógico. Assim, também se tem

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \quad (\text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ não existe}) \quad \Rightarrow \sum u_n \text{ é divergente.}$$

Desta forma, se o limite da sucessão $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ não for nulo (ou não existir), podemos afirmar de imediato que $\sum u_n$ é divergente. Diremos que esta série é **grosseiramente divergente.**

Prova do Teorema 2.2.1 **Seja $\sum u_n$ uma série convergente** e $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a sucessão das somas parciais. Por definição de série convergente,

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = l \in \mathbb{R}.$$

Observe-se que se tem

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N-1} u_n = u_N$$

Assim,

$$\lim_{N\to+\infty} u_N = \lim_{N\to+\infty}(S_N - S_{N-1}) = \lim_{N\to+\infty} S_N - \lim_{N\to+\infty} S_{N-1} = l - l = 0.$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.2.2 *Determine a natureza da série* $\sum \frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0,$$

pelo que $\sum \frac{n}{n+1}$ *é divergente.*

Observação fundamental Existem muitas séries $\sum u_n$ divergentes tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Não devemos ler a implicação do Teorema 2.2.1 ao contrário!

Por exemplo, tomando a sucessão de termo geral $u_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log(1) = 0.$$

No entanto,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \log(n+1) - \log(n) = \log(N+1) - \log(1) = \log(N+1). \end{aligned}$$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \log(N+1) = +\infty \quad \text{e a série é divergente.}$$

2.3 Séries resto

Nos capítulos anteriores apresentámos somatórios e somas de séries com início na ordem $n = 1$. Naturalmente, tal não é obrigatório. Dada uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq N$, podemos escrever

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{N} u_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_0-1}) + \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0-1} u_n$ uma quantidade constante que não depende de N, retira-se facilmente que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ é convergente se e só se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ é convergente, e que nesse caso

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Acabámos pois de justificar o seguinte resultado:

Propriedade 2.3.1 *Seja $\sum u_n$ uma série convergente. Então, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n,$$

onde $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$

Exemplo 2.3.2 *Calcule* $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$

Sabemos do Exemplo 1.3.3 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Assim,

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{1(1+1)} - \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{3}.$$

■

Uma outra propriedade que resulta de forma imediata destas observações é a seguinte:

Propriedade 2.3.3 *Sejam* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões numéricas que apenas diferem num número finito de termos, isto é, tais que o conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : u_n \neq v_n\}$ *é finito.*

Então $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *são de mesma natureza: ou são ambas convergentes ou são ambas divergentes.*

Este resultado é por vezes enunciado da seguinte forma: "modificar um número finito de termos de uma sucessão não modifica a natureza da respectiva série."

Prova Seja n_0 um inteiro superior ao máximo do conjunto $\{n \in \mathbb{N} : u_n \neq v_n\}$ (existe, pois trata-se por hipótese de um subconjunto finito de $\mathbb{N}$).

Vimos que $\sum u_n$ converge se e só se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ converge ($N \to +\infty$). Da mesma forma, $\sum v_n$ converge se e só se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} v_n$ converge.

A prova fica concluída observando que para todo N, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=n_0}^{N} v_n$. ■

Definição 2.3.4 *Seja* $\sum u_n$ *uma série convergente. A sucessão* $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *de termo geral*

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

diz-se ***a série resto de*** $\sum u_n$.

De maneira evidente:

Propriedade 2.3.5 *Dada uma série convergente* $\sum u_n$,

$$\lim_{N\to+\infty} R_N = 0.$$

Prova De facto, pela Propriedade 2.3.1, para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n,$$

ou seja

$$R_N = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - S_N.$$

Basta agora passar ao limite: $\lim_{N \to +\infty} R_N = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \lim_{N \to +\infty} S_N = 0.$ ■

3 Séries de termos positivos

A série $\sum u_n$ diz-se de termos positivos se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

O presente capítulo é dedicado ao estudo deste tipo de séries.

3.1 Primeiras propriedades

Propriedade 3.1.1 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos.*
Então a sucessão das somas parciais $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ associada a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

Prova Tem-se, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{n=1}^{N+1} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n = u_{N+1} \geq 0.$$

$\blacksquare$

Sabemos da disciplina de Análise Matemática 1 que uma sucessão crescente $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admite apenas dois tipos de comportamento:

- Se $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ não é majorada,
$$\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty.$$
Nesta situação, $\sum u_n$ é por definição divergente.
- Se $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é majorada,
$$\lim_{N\to+\infty} S_N = l, \quad \text{onde} \quad l = \sup\{S_N \,:\, N \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$
Aqui, $\sum u_n$ é por definição convergente.

Obtivemos pois o seguinte resultado:

Teorema 3.1.2 *Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos. Então*

$$\sum u_n \quad \textit{é convergente} \qquad \Leftrightarrow \qquad (S_N)_{N\in\mathbb{N}} \textit{ é majorada.}$$

Exemplo 3.1.3 *Mostre que a série $\sum \dfrac{\cos^2(n)}{2^n}$ é convergente.*

Trata-se de uma série de termos positivos. Tem-se, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos^2(n)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq 1,$$

onde se usou sequencialmente a definição da sucessão das somas parciais, o facto de se ter, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) \leq 1$, e a fórmula da soma dos N primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo $\frac{1}{2}$ e de razão $r = \frac{1}{2}$.
Acabámos de mostrar que a sucessão $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é majorada (por 1). Podemos pois concluir pelo Teorema 3.1.2 que $\sum \frac{\cos^2(n)}{2^n}$ é convergente. ∎

Infelizmente, não parece muito fácil calcular a soma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(n)}{2^n}$, em parte por não conhecermos explicitamente o termo geral da sucessão das somas parciais (apenas conhecemos uma majoração). Em muitos casos, teremos de nos contentar com o conhecimento da natureza das diferentes séries...

3.2 Critérios de Comparação para séries de termos positivos

Se pensarmos um pouco, constatamos que o facto de a série $\sum \frac{1}{2^n}$ ser convergente jogou um papel fundamental neste último exemplo.
Foi em particular o que nos permitiu escrever que para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 1. \qquad \left(\text{note-se aliás que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1\right)$$

Aproveitando esta ideia, podemos provar um resultado mais geral:

Teorema 3.2.1 - 1º Critério de Comparação
Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de termos positivos ou nulos tais que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n.$$

Então

$$\sum v_n \quad \textit{converge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum u_n \quad \textit{converge.}$$

Prova Sejam $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ e $(\tilde{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ as sucessões das somas parciais associadas respectivamente a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supondo que $\sum v_n$ é convergente, tem-se por definição que $\lim\limits_{N\to+\infty} \tilde{S}_N = L \in \mathbb{R}$.
Como $(\tilde{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é crescente, podemos afirmar que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \tilde{S}_N \leq L.$$

Por outro lado, visto que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, tem-se

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} v_n = \tilde{S}_N \leq L.$$

Conclui-se que para todo $N \in \mathbb{N}$, $S_N \leq L$.

Assim, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é majorada. Pelo Teorema 3.1.2, $\sum u_n$ é convergente. ■

Exemplo 3.2.2 *Mostre que a série* $\sum \dfrac{\arctan(n)}{n(n+1)}$ *é convergente.*

Basta observar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{\arctan(n)}{n(n+1)} \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n(n+1)}$:
Sendo a série de termo geral $\dfrac{1}{n(n+1)}$ convergente, também o é a série de termo geral

$$v_n = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Pelo 1^o Critério de Comparação, $\sum \dfrac{\arctan(n)}{n(n+1)}$ é convergente. ■

De notar que esta técnica permite determinar a natureza desta série mas infelizmente não fornece o valor da sua soma. No entanto, atendendo a que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\arctan(n)}{n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{n(n+1)},$$

tem-se, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(n)}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Passando ao limite $N \to +\infty$, obtém-se a estimativa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

O 1^o Critério de Comparação merece ainda os seguintes importantes comentários:

- Como vimos no capítulo anterior, a natureza de uma série não é alterada se se modificar um número finito de termos da sucessão. Por essa razão:

Para aplicar o 1^o Critério de Comparação não é necessário verificar a desigualdade

$$u_n \leq v_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta fazê-lo a partir de uma certa ordem.

- Passando à contra-recíproca:

Se se verificarem as hipóteses do 1^o Critério de Comparação 3.2.1,

$$\sum u_n \quad \text{diverge} \qquad \Rightarrow \qquad \sum v_n \quad \text{diverge.}$$

Exemplo 3.2.3 *Mostre que a série* $\sum \frac{1}{n}$ *é divergente.*

A série $\sum \frac{1}{n}$ é chamada de série harmónica. Constatemos que se trata de uma série divergente:

Utilizando a desigualdade $\log(1+x) \leq x$ para todo $x \geq 0$, tem-se para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Vimos que $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ é divergente, pelo que a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$ é divergente. ■

Eis um segundo Critério de Comparação bastante útil:

Teorema 3.2.4 - 2^{o} Critério de Comparação
Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões de termos positivos, com* $v_n \neq 0$ *a partir de uma certa ordem.*
Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in]0; +\infty[$$

então

$$\sum u_n \text{ e } \sum v_n$$

possuem a mesma natureza, ou seja, ou são ambas convergentes ou são ambas divergentes.

Prova $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$ significa que para todo o $\epsilon > 0$ escolhido, existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \epsilon,$$

ou seja, para $n \geq N$,

$$l - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \epsilon.$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{l}{2}$, e tendo em conta que $v_n > 0$, obtém-se

$$\frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3l}{2} v_n.$$

- Da primeira desigualdade, pelo **1º** Critério de Comparação, deduz-se que se $\sum u_n$ converge, $\sum \frac{l}{2} v_n$ converge. Como $\frac{l}{2} \neq 0$, $\sum v_n$ converge.
- Da mesma forma, deduz-se da segunda desigualdade que se $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.

■

Exemplo 3.2.5 *Determine a natureza da série* $\sum \frac{1}{n^2}$.

Observemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \in]0; +\infty[.$$

Assim, pelo 2^o Critério de Comparação, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$ possuem a mesma natureza. Sabemos que a segunda é convergente, logo a primeira também o é. ■

No caso de se ter $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ não têem necessariamente a mesma natureza.
Para ilustrar este facto, pode por exemplo tomar-se $u_n = \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. No entanto, é válido o seguinte resultado:

Teorema 3.2.6 3º Critério de Comparação
Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões de termos positivos, com* $v_n \neq 0$ *a partir de uma certa ordem.*
Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

então

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

ou ainda, observando a contra-recíproca,

$$\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{diverge.}$$

Prova $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ significa que para todo o $\epsilon > 0$ escolhido, existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| < \epsilon.$$

Escolhendo por exemplo $\epsilon = 1$ e observando que as sucessões são positivas, obtém-se que

$$u_n < v_n$$

a partir de uma certa ordem. Pode-se então concluir pelo 1^o Critério de Comparação. ■

Naturalmente, para que os Critérios de Comparação possam ser utilizados eficazmente, é necessário conhecer à partida a natureza de um grande número de séries.
Nesse sentido, o teorema seguinte fornece a natureza das séries do tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ditas séries de Dirichlet:

Teorema 3.2.7 Séries de Dirichlet

A série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *é divergente se* $\alpha \leq 1$ *e convergente se* $\alpha > 1$.

Prova Seja $\alpha \leq 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha \leq n$, ou seja $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. A série harmónica é divergente, pelo que, pelo 1^o Critério de Comparação, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Johann Dirichlet, 1805-1859

Falta ainda estudar o caso $\alpha > 1$. Utilisaremos aqui uma técnica dita de *comparação com um integral.* Para $n \geq 2$, comecemos por observar que para $x \in [n-1; n]$,

$$\frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Integrando esta desigualdade no intervalo $[n-1; n]$, vem

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} dx = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Somando agora estas desigualdades para $n = 2, 3, \ldots, N$, obtém-se

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_{1}^{N} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^N = \frac{1}{1-\alpha} \left(N^{1-\alpha} - 1 \right).$$

Como $1-\alpha < 0$, $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left((N+1)^{1-\alpha} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha - 1}$, pelo que a sucessão $\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ é limitada.

Logo, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente. ∎

3.3 Representação decimal de um número real

No secundário, aprendemos que os números reais admitem uma representação em "dízima finita/infinita (periódica ou não períodica)". Mas o que é exactamente uma dízima infinita? Uma representação que "nunca termina"? Terá isto algum sentido?

De facto, este assunto nunca foi muito bem explicado...A razão é simples: só agora, com o estudo das séries, possuimos os instrumentos adequados para compreender este conceito.

Tomemos o exemplo do número

$$x = 0,(5) = 0,55555......$$

O sentido que devemos dar a esta notação é o seguinte:

$$x = 5.10^{-1} + 5.10^{-2} + 5.10^{-3} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 5.10^{-n}.$$

Ou seja, aquilo que está escondido por detrás de uma representação em dízima infinita é simplesmente a convergência de uma série:

Definição 3.3.1 *Seja $x \in [0;1]$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n \in \{0; 1; 2; 3; \ldots; 8; 9\}.$$

Diz-se que $\mathbf{0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ é uma representação em dízima de x se

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}.$$

Note-se que a série é convergente. Basta utilizar o primeiro critério de comparação:

$$0 \leq a_n 10^{-n} \leq 9.10^{-n}$$

e a série $\sum 9.10^{-n}$ é convergente (série geométrica de razão $\frac{1}{10}$).

Vejamos agora um exemplo curioso. Tomemos o número

$$x = 0,(9) = 0,999.....$$

Tem-se

$$x = 0,(9) = \sum_{n=1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9.\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

(Soma de uma série geométrica de primeiro termo $a = \frac{1}{10}$ e razão $r = \frac{1}{10}$.)

Acabámos pois de mostrar que

0,(9)=1.

Da mesma forma, é fácil ver que $0,7(9) = 0,8$, que $1,345 = 1,344(9)$, ...etc.
Em particular:

Qualquer número real que admite uma representação em dízima finita admite também uma representação em dízima infinita períodica, de período 9. Em particular:
Não existe unicidade da representação decimal de um número real.

Observação Existem vários processos elementares que permitem verificar a igualdade $0,(9) = 1$.

- Seja $x = 0,(9)$. Multiplicando esta igualdade por 10, vem $10x = 9,(9)$.
  Desta forma, $10x - x = 9,(9) - 0,(9) = 9$, de onde se deduz que $9x = 9$ e $x = 1$.

- Ainda mais simples: multiplique por 3 a igualdade $\frac{1}{3} = 0,333....$

3.4 O Critério de Cauchy

Sabemos do capítulo anterior que a série geométrica $\sum r^n$ converge se e só se $|r| < 1$. O *Critério de Cauchy*, também conhecido por *Critério da Raíz*, diz essencialmente que se o termo geral de uma sucessão de termos positivos u_n se comporta no infinito como r^n, então a série $\sum u_n$ converge ou diverge consoante $r < 1$ ou $r > 1$. Note-se que de um ponto de vista intuitivo,

$$u_n \approx r^n \qquad \text{significa} \qquad \sqrt[n]{u_n} \approx r.$$

Eis pois o enunciado correcto deste Critério:

Teorema 3.4.1 Critério de Cauchy
Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos com

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = r. \qquad (r \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ou } r = +\infty)$$

Então:

- *Se $r < 1$, $\sum u_n$ é convergente;*
- *Se $r > 1$ (ou $r = +\infty$), $\sum u_n$ é grosseiramente divergente.*

Prova Comecemos por supor que $r < 1$. Dizer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = r$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N,\ r - \epsilon < \sqrt[n]{u_n} < r + \epsilon.$$

Como $r < 1$, é possível escolher ϵ suficientemente pequeno por forma a que $L = r + \epsilon < 1$.
Então, a partir de uma certa ordem, tem-se, em particular, que

$$\sqrt[n]{u_n} < L, \qquad \text{ou ainda} \qquad u_n < L^n.$$

A série $\sum L^n$ é uma série geométrica de razão $L \in [0;1[$, logo converge. Pelo 1º Critério de Comparação, $\sum u_n$ converge.

Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857

Por outro lado, se $r > 1$ (ou $r = +\infty$), é imediato que a partir de uma certa ordem $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, ou seja, $u_n \geq 1^n = 1$. Logo, a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tende para 0: por definição, $\sum u_n$ é grosseiramente divergente. ■

Exemplo 3.4.2 *Determine a natureza da série* $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

Seja $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$. Tem-se $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.
Como $\mathrm{e}^{-1} < 1$, pelo Critério de Cauchy, $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ converge. ■

Uma última observacão:

Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, o Critério de Cauchy não permite concluir quanto à natureza da série $\sum u_n$.

Por exemplo, tomando $u_n = \dfrac{1}{n}$, temos $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ e $\sum \frac{1}{n}$ é divergente.
Por outro lado, tomando $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, tem-se igualmente $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ mas $\sum \frac{1}{n^2}$ converge...

3.5 O Critério de d'Alembert

Dada uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos positivos, sabemos que se $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe, então existe também $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Este facto permite deduzir de maneira imediata o Critério dito de D'Alembert (ou Critério da Razão):

Teorema 3.5.1 Critério de d'Alembert
Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos com

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r. \qquad (r \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ou } r = +\infty)$$

Então:

- *Se $r < 1$, $\sum u_n$ é convergente;*
- *Se $r > 1$ (ou $r = +\infty$), $\sum u_n$ é grosseiramente divergente.*

Exemplo 3.5.2 *Determine a natureza da série $\sum \dfrac{n^2}{(n!)}$.*

Seja $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$. Tem-se

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Como $0 < 1$, pelo Critério de d'Alembert, $\sum \dfrac{n^2}{n!}$ converge. ■

Jean D'Alembert, 1717-1783

4 Séries de termos com sinal variável

Até ao momento, os critérios estudados apenas se aplicam a séries de termos positivos. No presente capítulo estudaremos o caso de séries cujos termos não possuem sinal constante.

4.1 Convergência absoluta

Teorema 4.1.1 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão numérica.*
Então

$$\sum |u_n| \textit{ converge} \Rightarrow \sum u_n \textit{ converge.}$$

Prova Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão tal que $\sum |u_n|$ é convergente.

Seja $w_n = |u_n| + u_n$. Como se tem, para todo $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|.$$

Somando $|u_n|$ a estas desigualdades, obtém-se

$$0 \leq w_n \leq 2|u_n|.$$

Assim, $\sum w_n$ é uma série de termos positivos. Como $\sum |u_n|$ é convergente, pelo 1^o Critério de Comparação, $\sum w_n$ converge. Logo,

$$\sum u_n = \sum w_n - \sum |u_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes, logo $\sum u_n$ é convergente. ■

Exemplo Determine a natureza da série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.
A série

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$$

é convergente, pelo que $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Mais uma vez se chama a atenção para não ler esta implicação ao contrário: é perfeitamente possível que $\sum u_n$ seja convergente mas que $\sum |u_n|$ seja divergente.
Nesse caso diremos que $\sum u_n$ é semi-convergente.

Caso $\sum |u_n|$ seja convergente, diremos que $\sum u_n$ é absolutamente convergente. Por exemplo, $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ é uma série absolutamente convergente.

Na próxima secção, veremos um exemplo de uma série simplesmente convergente.

4.2 Séries alternadas

Definição 4.2.1 *A série $\sum u_n$ diz-se* ***alternada*** *se para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n a_{n+1} \leq 0,$$

o que significa que dois termos consecutivos possuem sinais opostos.

Nesta secção forneceremos um critério muito interessante que permite concluir quanto à convergência de certas séries alternadas. Antes de o fazer, precisamos de provar o seguinte lema:

Teorema 4.2.1 *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões tais que*

- *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$;*
- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente;*
- *$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0.$

(as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizem-se ***adjacentes.****)*

Então as duas sucessões são convergentes e tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Prova Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, pelo primeiro ponto

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1.$$

Assim, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e majorada (por b_1). Da mesma forma, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e minorada (por a_1). Por um teorema estudado em Análise Matemática 1, ambas as sucessões são convergentes. A igualdade dos limites tira-se do último ponto. ∎

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte critério:

Teorema 4.2.2 - Critério de Leibniz

Seja $\sum u_n$ *uma série alternada tal que*

- $|u_n|$ *é decrescente;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Então $\sum u_n$ *é convergente.*

Prova Seja $\sum u_n$ uma série alternada.
Vamos supor que $u_1 \leq 0$.
(A demonstração é análoga se $u_1 \geq 0$)

Neste caso, os termos de ordem ímpar são positivos e os de ordem par são negativos: para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-1)^n |u_n|.$$

Seja $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a sucessão das somas pariciais associada.A estratégia desta demonstração passa por provar que a subsucessões $(a_N)_{N\in\mathbb{N}} = (S_{2N-1})_{N\in\mathbb{N}}$ e $(b_N)_{N\in\mathbb{N}} = (S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ são adjacentes.

Gottfried Leibniz, 1646-1716

Para todo $N \in \mathbb{N}$:

- $a_N - b_N = S_{2N-1} - S_{2N} = \sum\limits_{n=1}^{2N-1} u_n - \sum\limits_{n=1}^{2N} u_n = -u_{2N} = -(-1)^{2N}|u_{2N}| = -|u_{2N}| \leq 0,$
  pelo que
  $$a_N \leq b_N.$$
- $a_{N+1} - a_N = \sum\limits_{n=1}^{2(N+1)-1} u_n - \sum\limits_{n=1}^{2N-1} u_n = u_{2N+1} + u_{2N} = -|u_{2N+1}| + |u_{2N}| \geq 0$
  já que $|u_N|$ é decrescente. Logo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.
- Por um cálculo análogo, $(b_N)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.
- Finalmente, como $a_N - b_N = -|u_{2N}|$ e como $\lim\limits_{N\to+\infty} u_N = 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} a_N - b_N = 0$.

Assim, $(S_{2N-1})_{N\in\mathbb{N}}$ e $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ são adjacentes pelo que possuem o mesmo limite: por um teorema de Análise Matemática 1, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é convergente. Por definição, $\sum u_n$ é convergente.
■

Exemplo Asérie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (dita série harmónica alternada) verifica as condições do Critério de Leibniz, pelo que é convergente. Note-se no entanto que $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é divergente. Assim,

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{é semi-convergente .}$$

■