Seqüências e Séries

Notas de Aula

4º Bimestre/2010

1º ano - Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

Profª Drª Gilcilene Sanchez de Paulo

Seqüências e Séries

Para $x \in \mathbb{R}$, podemos em geral, obter $senx$, e^x, lnx, $arctgx$ e valores de outras funções transcendentes utilizando uma calculadora ou uma tabela.

Um problema fundamental consiste em determinar como as calculadoras calculam esses números, ou como se constrói uma tabela.

As séries numéricas infinitas (somas infinitas) podem ser usadas para obter valores funcionais de uma certa função $f(x)$, ou seja, valores aproximados para $f(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Portanto, temos que interpretar essas "somas infinitas" e saber o seu significado preciso. Lidar com o infinito sempre foi um problema difícil; e os matemáticos sabem disso há mais de dois milênios. E para que nós tenhamos uma idéia das dificuldades que podem surgir, vamos logo dar um exemplo simples e bastante esclarecedor. Considere a soma infinita,

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Se escrevermos $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$, teremos $S = 0$. Mas podemos também escrever $S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots$ e agora concluímos que $S = 1$. Ainda há uma terceira possibilidade, tão legítima como as anteriores:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S \Rightarrow 2S = 1 \Rightarrow S = 1/2\ .$$

Afinal, $S = 0$, $S = 1$ ou $S = 1/2$? Por que três respostas diferentes? Claro que não podemos aceitar nenhuma delas em detrimento das outras.

Este exemplo aponta para a necessidade de se conceituar o que significa "soma infinita". Como veremos, essa conceituação excluirá a possibilidade de somas infinitas do tipo que acabamos de considerar. E para chegar a essa conceituação devemos primeiro estudar as chamadas **"seqüências numéricas"**.

1 Seqüências numéricas

Definição 1. Uma seqüência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n a um número real $a(n)$, indicado por a_n, o qual é chamado $n-$ésimo termo da seqüência.

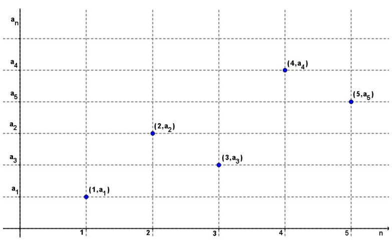


Figura 1: Representação gráfica de uma seqüência numérica.

Um exemplo concreto de seqüência numérica é dado pela seqüência dos números pares positivos $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots)$, cujo termo geral da seqüência é designado por $a_n = 2n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. A seqüência dos números ímpares positivos também tem uma fórmula simples para o termo geral, a qual é dada por $a_n = 2n + 1$, com $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$; ou $a_n = 2n - 1$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Mas nem sempre o termo geral de uma seqüência é dado por uma fórmula, embora, evidentemente, sempre haja uma lei de formação bem definida que permite determinar o termo geral da seqüência. É esse o caso das aproximações decimais por falta de $\sqrt{2}$, que formam a seqüência infinita

$$a_1 = 1,4;\ a_2 = 1,41;\ a_3 = 1,414;\ a_4 = 1,4142;\ a_5 = 1,41421;\ a_6 = 1,414213;\ \cdots$$

Outro exemplo é a seqüência dos números primos,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, \cdots$$

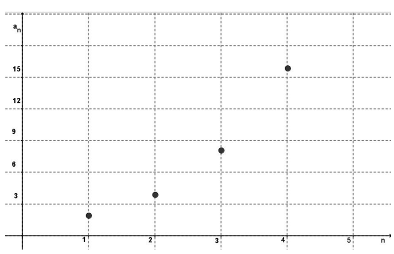
Como se sabe, não existe fórmula para o termo geral da seqüência dos números primos, mas todos eles estão determinados e podem ser encontrados, por exemplo, pelo chamado "crivo de Eratóstenes".

A notação (a_n) é muito usada para denotar uma seqüência. Também se escreve $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,ou simplesmente a_n. Podemos também usar quaisquer outras letras, como (b_n), (c_n), (x_n), (y_n), (z_n), etc. Alguns autores costumas escrever $\{a_n\}$ em vez de (a_n), mas preferimos reservar essa notação entre chaves para o *conjunto de valores da seqüência*. Essa distinção é importante, pois uma seqüência possui infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito. Por exemplo, a seqüência $(+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \cdots)$, é infinita, com elemento genérico $an = (-1)^{(n-1)}$; mas o seu conjunto de valores possui apenas dois elementos , +1 e -1, de forma que, segundo convencionamos, $\{a_n\} = \{-1, +1\}$.

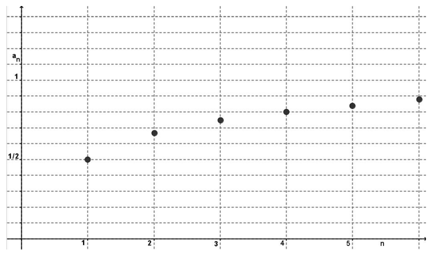
Exemplos

(1) Seqüência de termo geral $a_n = 2^n$. $(2, 4, 8, 16, 32, \cdots)$

(2) Seqüência de termo geral $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots\right)$



(1)



(2)

Figura 2: Representação gráfica das seqüências numéricas (1) e (2).

Observamos que quando n cresce infinitamente, os termos a_n da seqüência (1) também crescem infinitamente. Ao passo que os termos a_n da seqüência (2) acumulam-se próximos ao número 1.

(3) Seja $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k$, $t \neq 0$ e $t \neq 1$. Calcule o termo geral da seqüência (a_n).

Solução: $a_n = 1+t+t^2+\cdots+t^n$. Multiplicando pelo fator t obtemos, $ta_n = t+t^2+t^3\cdots+t^{n+1}$. Assim,

$$a_n - ta_n = 1 - t^{n+1} \Rightarrow (1-t)a_n = 1 - t^{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

Note que a_n é a soma dos $(n+1)$ primeiros termos da P.G. $1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$.

Para algumas seqüências damos o primeiro termo a_1 e uma regra que permite determinar qualquer termo a_{k+1} a partir do termo precedente, para $k \geq 1$. Isto é o que constitui uma *definição por recorrência* e a seqüência é dita definida por recorrência.

(4) Ache os quatro primeiros termos e o $n-$ésimo termo da seqüência definida por $a_1 = 3$ e $a_{k+1} = 2a_k$ para $k \geq 1$.
$a_1 = 3 = 2^0 \cdot 3$
$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 = 2^1 \cdot 3$
$a_3 = 2a_2 = 2.6 = 12 = 2^2 \cdot 3$
$a_4 = 2a_3 = 2.12 = 24 = 2^3 \cdot 3$
Isto sugere que $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$.
É possível provar por indução finita que a suposição é correta. Prove!

1.1 Seqüências convergentes e divergentes

Algumas seqüências apresentam uma propriedade de que quando n cresce arbitrariamente, a_n se aproxima de um número real L, ou seja, a diferença $|a_n - L|$ é tão pequena quanto se deseja, desde que n seja suficientemente grande.

Definição 2. Seja (a_n) uma seqüência numérica e L um número real. Dizemos que

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \iff \forall\, \varepsilon > 0; \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall\, M > 0; \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n > N \Longrightarrow a_n > M.$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall\, M > 0; \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n > N \Longrightarrow a_n < -M.$

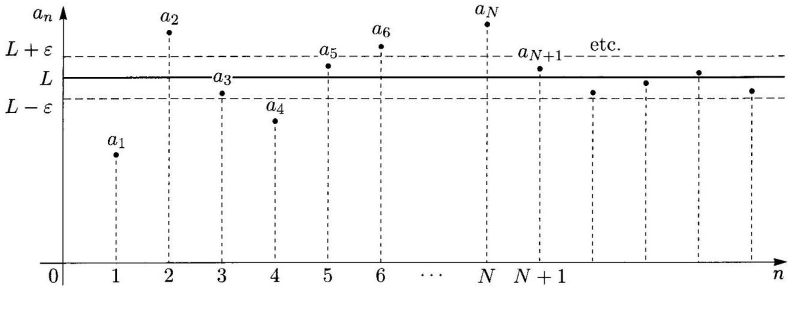


Figura 3: Representação gráfica de uma seqüência a_n que se aproxima de um número real L.

Na figura 3, exibimos uma seqüência (a_n) tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Definição 3. Se existe um número real (finito) L tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ a seqüência (a_n) é dita **convergente**. Caso contrário, a seqüência é dita **divergente**.

Exemplo

(5) Utilize a definição para provar que a seqüência $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\right)$, cujo termo geral é $a_n = \frac{n-1}{n}$, tem limite $L = 1$.

Solução:

Exercício: (1) Prove utilizando a definição de limite que a seqüência $(a_n) = \left(\frac{n}{n+12}\right)$ converge para o número 1.

Solução:

Alguns Teoremas para convergência de seqüências

Teorema 1. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$, se $|r| < 1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n$ não existe se $|r| > 1$

Teorema 2 (Teorema do Confronto). Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) seqüências tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Se existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$, para todo $n > n_1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

Observação: Se suprimirmos de uma seqüência a_n um número finito de seus termos, isso não altera em nada o caráter da seqüência com n no infinito. Assim, se a seqüência original converge para L, ou diverge, a nova seqüência convergirá para L ou divergirá, respectivamente.

Teorema 3. Seja (a_n) uma seqüência. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercício: (2) Utilizando a Definição 3, os Teoremas 1, 2 e 3, verifique se são convergentes ou divergentes as seguintes seqüências:

a) $\left(\dfrac{n^2+2n-1}{2n^2+5}\right)$ b) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k$, $0 < t < 1$, c) $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

d) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ e) $(1,01)^n$ f) $\left(\dfrac{5n}{e^{2n}}\right)$ g) $\left(\dfrac{cos^2 n}{3^n}\right)$ h) $(n \cdot sen(\pi/2n))$

i) $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ j) (10^{1-n}) k) $a_n = (-1)^n$ l) $(\sqrt[n]{n})$

1.2 Seqüências Monótonas

Definição 4. Dizemos que uma seqüência (a_n) é monótona não-decrescente (ou crescente) se, para todos os naturais m, n tais que $m < n$ implicar $a_m \leq a_n$ (ou $a_m < a_n$). Se $m < n$ implicar $a_m \geq a_n$ (ou $a_m > a_n$) dizemos que a seqüência (a_n) é monótona não-crescente (ou decrescente).

Definição 5. Uma seqüência (a_n) é limitada se existe um número real positivo K tal que $|a_n| \leq K$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4. Se (a_n) é uma seqüência convergente então (a_n) é limitada.

Pergunta: Toda seqüência limitada é convergente?
Solução: Não. Considere a seqüência $a_n = (-1)^n$. Evidentemente, a seqüência é limitada, $|a_n| \leq 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Entretanto, os valores desta seqüência alternam de -1 para 1 indefinidamente, e portanto ela não é convergente.

Teorema 5. Se (a_n) é uma seqüência monótona e limitada então (a_n) é convergente.

Teorema 6. a) Se (a_n) é uma seqüência monótona cresecente (ou não-decrescente) e ilimitada superiormente então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

b) Se (a_n) é uma seqüência monótona decresecente (ou não-crescente) e ilimitada inferiormente então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Exemplo

(6) A seqüência $\left(\dfrac{5^n}{3^n n!}\right)$ é convergente.
Solução:

Exercício: (3) Verifique se são convergentes ou divergentes as seguintes seqüências:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n2^n}$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{3n+1}$

Lista 11: Seqüências

A) Exercícios do Guidorizzi – Vol. 4 – Páginas 6 - 10:

Exercícios 1.1

(1) **(2)** a-b-c-d-l-m-n-o-q-s **(3)** **(4)** a-b **(5)** **(9)** **(12)**

B) **Dado o termo genérico de ordem n das seqüências dos Exercícios 1 a 16 determine os quatro primeiros termos e $\lim_{n\to\infty} a_n$, quando existir.**

1 $a_n = \dfrac{n}{3n+2}$ **2** $a_n = \dfrac{6n-5}{5n+1}$ **3** $a_n = \dfrac{7-4n^2}{3+2n^2}$ **4** $a_n = \dfrac{4}{8-7n}$

5 $a_n = -5$ **6** $a_n = \sqrt{2}$ **7** $a_n = \dfrac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$

8 $a_n = 8n+1$ **9** $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n^2+9}}$ **10** $a_n = \dfrac{100n}{n^{3/2}+4}$

11 $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n^2+4n+5}$ **12** $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ **13** $a_n = 1 + (0{,}1)^n$

14 $a_n = 1 - (1/2^n)$ **15** $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$ **16** $a_n = (n+1)/\sqrt{n}$

Em cada um dos Exercícios 17 a 34 determine o limite da seqüência, quando existir.

17 $\{6(-5/6)^n\}$ **18** $\{8-(7/8)^n\}$ **19** $\{\operatorname{arctg} n\}$ **20** $\left\{\dfrac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n}\right\}$

21 $\{1000-n\}$ **22** $\{(1{,}0001)^n/1000\}$ **23** $\left\{(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ **24** $\left\{\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$

25 $\left\{\dfrac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$ **26** $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ **27** $\left\{\dfrac{e^n}{n^4}\right\}$ **28** $\{e^{-n}\ln n\}$

29 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ **30** $\{(-1)^n n^3 3^{-n}\}$ **31** $\{2^{-n}\operatorname{sen} n\}$ **32** $\left\{\dfrac{4n^3+5n+1}{2n^3-n^2+5}\right\}$

33 $\left\{\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}$ **34** $\left\{n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right\}$

Respostas dos exercícios de número ímpar do bloco **B)**

1 1/5, 1/4, 3/11, 2/7; 1/3 **3** 3/5, −9/11, −29/21, −57/35; −2
5 −5, −5, −5, −5; −5 **7** 2, 7/3, 25/14, 7/5; 0 **9** $2/\sqrt{10}$, $2/\sqrt{13}$, $2/\sqrt{18}$, 2/5; 0
11 3/10, −6/17, 9/26, −12/37; 0 **13** 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001; 1
15 2, 0, 2, 0; o limite não existe **17** 0 **19** $\pi/2$ **21** Não existe
23 0 **25** Não existe **27** Não existe **29** e **31** 0 **33** 1/2

2 Séries numéricas

Definição 6. Seja (a_n) uma seqüência infinita. A soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ é chamada **série numérica infinita** de termo geral a_n. Se somarmos apenas os n primeiros termos desta série, teremos o que chamamos de **soma parcial** $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

Exemplos

(7) A seqüência dos números pares fornece a série $2+4+6+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$ de termo geral $a_n = 2n$.

(8) A seqüência numérica $(1, 2, 6, 24, 120, 720, \cdots)$ fornece a série $1+2+6+24+120+720+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n!$ de termo geral $a_n = n!$.

(9) A seqüência numérica $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ fornece a série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, de termo geral $a_n = \frac{1}{n}$, conhecida como **série harmônica**.

(10) A seqüência numérica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \cdots, \frac{1}{n(n+1)}, \cdots\right)$ fornece a série $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, de termo geral $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, conhecida como **série telescópica**.

Definição 7. Dizemos que um número real S é a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** para S quando $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ (o limite da seqüência das somas parciais $(S_1, S_2, S_3, \cdots)$ é S). Neste caso, escrevemos $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Quando $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existe, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

Exemplos

(11) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge. Trata-se da série que nos motivou a conceituar soma infinita.
Solução:
• Seqüência das somas parciais:
$S_1 = a_1 =,$
$S_2 = a_1 + a_2 =,$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 =,$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =,$
$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n =.$

• Limite da seqüência (S_n): $\lim_{n\to\infty} S_n =$

(12) A série $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots$ diverge.
Solução:
• Seqüência das somas parciais:

• Limite da seqüência (S_n): $\lim_{n\to\infty} S_n =$

(13) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ converge.
Solução:
• Seqüência das somas parciais:

• Limite da seqüência (S_n): $\lim_{n\to\infty} S_n =$

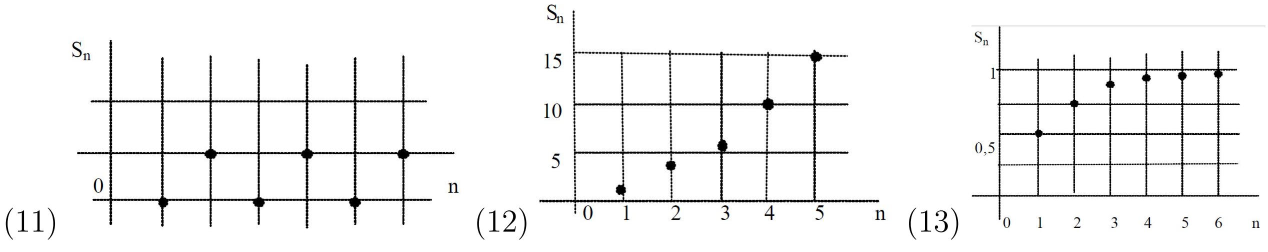


Figura 4: Representação da seqüência (S_n) dos exemplos (11), (12) e (13).

Exercício

(4) Determine a série infinita que tem a seguinte seqüência de somas parciais. Além disso, verifique se a série é convergente ou divergente.

a) $\left(S_n = \frac{4n}{n+1}\right)$ b) $\left(S_n = \frac{2n}{3n+1}\right)$ c) $\left(S_n = \frac{n^2}{n+1}\right)$ d) $(S_n = 2^n)$

2.1 Séries Geométricas

Uma série geométrica é da forma $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, com $a \neq 0$.

★ A $n-$ésima soma parcial da série geométrica é $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$.
De fato,

- Se $|r| < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$, e assim, $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$.
- Se $|r| > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r^n$ não exite, e assim, $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe.
- Se $r = 1$, então $S_n = na$ e portanto, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na$ não existe.
- Se $r = -1$, então S_n oscila e portanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe.

Conclusão

A série geométrica converge se $|r| < 1$ e a sua soma é $S = \dfrac{a}{1-r}$.
A série geométrica diverge se $|r| \geq 1$.

Exercícios

(5) Determine se a série é convergente ou divergente, se convergente encontre a soma.

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ b) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \frac{81}{16} \cdots$ c) $-1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} \cdots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e) $0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \cdots$

(6) Expresse a dízima periódica $2,358585858.....$ como razão de dois inteiros.

2.2 Série Harmônica

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é conhecida como série harmônica.

O Teorema enunciado a seguir será utilizado para provar a divergência da série harmônica.

Teorema 7. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $|S_m - S_n| < \varepsilon$ para todo $m, n > N$.

★ A série harmônica é divergente.
De fato,

2.3 Série Telescópica

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é conhecida como série telescópica.

★ A série telescópica é convergente.
De fato,

2.4 Propriedades das séries

(P1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ também converge, $\forall\ c \in \mathbb{R}$.
E vale, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(P2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ também converge.
E vale,
$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(P3) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ diverge.

(P4) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ pode divergir ou convergir.
No momento oportuno, veremos exemplos para a **(P4)**.

Exemplos

(14) Justifique, utilizando as propriedades acima, se a série a seguir é convergente ou divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + 2^n\right)$

Para muitas séries é díficil ou praticamente impossível encontrar uma fórmula simples para S_n. Em tais casos, são usados alguns testes que não nos fornecem a soma S da série; dizem-nos apenas se a soma existe. Isto é suficiente na maioria das aplicações porque, sabendo que a soma existe, podemos aproximar o seu valor com um grau arbitrário de precisão, bastanto somar um número suficiente de termos da série.

2.5 Séries de termos positivos

Teorema 8. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos e se existe $K > 0$ tal que $S_n \leq K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Em uma série de termos positivos, é evidente, que (S_n) é monótona não-decresente $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$, pois $a_1 \leq a_1 + a_2 \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq \cdots \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \cdots$. Portanto, basta verificar se a seqüência (S_n) é limitada para concluir se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente ou divergente, segundo os Teoremas 5 e 6, respectivamente.

Exemplo

(15) Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n2^n}$ converge.

2.6 Teste da Divergência

Teorema 9 (Teorema da divergência). Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

De fato,

CUIDADO: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não garante a convergência da série. (Ver série harmônica).

Exemplo

(16) Prove que as séries são divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}$ c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Exemplos para a **(P4)**: e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

2.7 Teste da Integral

Teorema 10. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos e f uma função contínua, tal que $f(n) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x)\, dx \text{ converge.}$$

Exemplo

(17) Determine se a série dada é convergente ou divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

2.8 Série-p

Uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é denominada **Série-p**.

A série-p converge se $p > 1$. Caso contrário, se $p \leq 1$, a série-p diverge.

De fato,

2.9 Teste da comparação

Teorema 11. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos.

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n$, $\forall\, n > N \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge e $b_n \leq a_n$, $\forall\, n > N \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplo

(18) Determine se a série dada é convergente ou divergente:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(3n)}{n^2+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{17n}{5n^3-1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n\sqrt{n}}{13n^2-n-10}$.

Para utilizarmos um Teste da Comparação devemos primeiro escolher uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ adequada para então provar que $a_n \leq b_n$ ou $b_n \leq a_n$ para todo inteiro n maior do que algum inteiro positivo N. Esta prova pode ser difícil se a_n é uma expressão complicada. O teorema seguinte é um teste de comparação mais fácil de aplicar porque escolhida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, basta calcular o limite do quociente a_n/b_n quando $n \to \infty$.

Teorema 12. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos positivos e se $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$. Então, ou ambas as séries convergem, ou ambas divergem.

Para obter uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ conveniente para ser usada na forma limite do teste da comparação no caso em que a_n é um quociente,um bom processo consiste em reter apenas os termos do numerador e do denominador que têm o maior efeito sobre a magnitude. Podemos também substituir qualquer fator constante c por 1, pois $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cb_n$ são ambas convergentes ou divergentes.

a_n	termos de maior magnitude	escolha de b_n
$\dfrac{3n+1}{4n^3+n^2-2}$	$\dfrac{3n}{4n^3} = \dfrac{3}{4n^2}$	$\dfrac{1}{n^2}$
$\dfrac{\sqrt[3]{n^2+4}}{6n^2-n-1}$	$\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{6n^2} = \dfrac{1}{6n^{4/3}}$	$\dfrac{1}{n^{4/3}}$

Tabela 1: Ilustração para escolha de b_n.

Exemplo

(19) Determine se as séries seguintes convergem ou divergem:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2+5^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}-1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}+1}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$

2.10 Séries Alternadas

Uma série infinita é denominada **série alternada** quando seus termos são alternadamente positivos e negativos. Isto é, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$.

Teorema 13 (Teste de Leibniz). Em uma série alternada,

Se $a_n \geq a_{n+1}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série é convergente.

★ **Conseqüência:** Em uma série alternada, se $a_n \geq a_{n+1}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = c > 0$, então a série é divergente.

Exemplo

(20) Determine se as seguintes séries alternadas convergem ou divergem:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n}{4n^2-3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n}{4n-3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

2.11 Convergência Absoluta e Convergência Condicional

Definição 8. Uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente

Exemplo

(21) Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Teorema 14. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Exemplo

(22) Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(n)}{n^2}$ converge.

Definição 9. Uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita condicionalmente convergente se a série é convergente, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente.

Exemplo

(23) Verifique que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1)}{n}$ é condicionalmente convergente.

Exercícios

(7) Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1)}{\sqrt{2n+1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1)}{\ln(n+1)}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi/6))}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{2^(1/n))}{n!}$

2.12 Teste da Razão

Teorema 15 (Critério D'Alembert). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos.

Seja $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

(a) Se $L < 1$ então a série é absolutamente convergente.

(b) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$ então a série diverge.

(c) Se $L = 1$ nada se pode concluir.

Exemplo

(24) Use o teste da razão e determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente, divergente ou se o teste é inconclusivo.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n-1}$

2.13 Teste de Raíz

Teorema 16 (Critério de Cauchy). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos.

Seja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

(a) Se $L < 1$ então a série é absolutamente convergente.

(b) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$ então a série diverge.

(c) Se $L = 1$ nada se pode concluir.

Exemplo

(25) Ache $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ e use o teste da raíz para determinar se a série converge, divergente ou se o teste é inconclusivo.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{[\ln(n+1)]^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{[\ln(n)]^n}{n^{n/2}}$

TESTE	SÉRIE	CONVERGÊNCIA ou DIVERGÊNCIA	COMENTÁRIOS
Termo Geral	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Diverge se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Inconclusivo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Série Geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	Converge para $s = \dfrac{a}{1-r}$ se $\|r\| < 1$. Diverge se $\|r\| \geq 1$	Útil para testes de comparação.
Série-p	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	Converge se $p > 1$ Diverge se $p \leq 1$	Útil para testes de comparação.
Comparação	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $a_n, b_n > 0,\ a_n \leq b_n$	(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. (ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.	A série de comparação $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é, em geral, série geométrica ou série-p.
Comparação por Limite	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $a_n, b_n > 0$	Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k > 0$ (i) as duas séries são ambas convergentes ou divergentes.	Para achar b_n considere apenas os termos de a_n que têm maior efeito sobre a magnitude.
Séries Alternadas (Leibniz)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $a_n > 0$	Converge se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e se $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n$.	Aplicável somente as séries alternadas.
Absolutamente Convergente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.	Útil para séries que têm termos positivos e termos negativos.
Razão (D'Alembert)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = L$ (ou ∞) a Série (i) Converge (absolutamente) se $L < 1$. (ii) Diverge se $L > 1$ (ou ∞). (iii) Inconclusivo se $L = 1$.	Útil se a_n envolve fatoriais ou potências de grau n.
Raíz (Cauchy)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = L$ (ou ∞) a Série (i) Converge (absolutamente) se $L < 1$. (ii) Diverge se $L > 1$ (ou ∞). (iii) Inconclusivo se $L = 1$.	Útil se a_n envolve potências de grau n.
Integral	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n = f(n)$	(i) Converge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. (ii) Diverge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge.	$f(x)$ obtida de $f(n)$ deve ser: positiva; contínua e decrescente $\forall\, x \geq 1$.

Lista 12: Séries

(A) Determine se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{3}{2}\pi)+2}{3^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n}\right)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)^{1/3}}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{3}n\pi)}{n^2}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n!}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$

(B) Determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

(C) Calcule s_1, s_2, s_3 e s_n e depois calcule a soma da série, caso seja convergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{(2n+5)(2n+3)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(D) Use o teste de divergência para determinar se a série diverge, ou se é necessária uma investigação adicional.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{5n-1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+(0,3)^n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^n+1}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{2n}{7n-5} + \dfrac{1}{4^n}\right)$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\ln(n+1)}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \; sen(1/n)$

(E) Utilize séries conhecidas, convergentes ou divergentes, juntamente com as propriedades de séries **(P1)**-**(P4)** para determinar se a série é convergente ou divergente. No caso de convergência, determine a soma.

1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3n})$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{8^n} + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

(F) Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3+2n)^2}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$

(G) Use o teste básico de comparação (Teorema 11) para determinar se a série converge ou diverge.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4+n^2+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n3^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\cos n}{n^2}$

(H) Use a forma limite do teste da comparação (Teorema 12) para determinar se a série converge ou diverge.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3+\sqrt{n}}$
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$

(I) Determine $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ e use o teste da razão para determinar se a série converge, diverge ou se o teste é inconclusivo.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+4}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{\sqrt{5^n(n+1)}}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}+10}{n!}$

(J) Determine $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ e use o teste da raíz para determinar se a série converge, diverge ou se o teste é inconclusivo.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

(K) Determine se as séries alternadas seguintes convergem ou divergem.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+7}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n5^{-n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+e^{-n})$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{2n}+1}{e^{2n}}$

(L) Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{6})}{n^2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}sen\frac{(2n-1)\pi}{2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{1/n}}{n!}$