Séries Numéricas

Definições básicas

- Chama-se **série numérica** a uma expressão do tipo

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

representada em geral por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \ , \ \sum_{n\geq 1} u_n \text{ ou } \sum u_n \ ,$$

onde (u_n) é uma sucessão de reais.

$u_1, u_2, \cdots \rightarrow$ **termos da série**

$u_n \rightarrow$ **termo geral da série**.

- Designam-se por **somas parciais da série**

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \ , \\ S_2 &= u_1 + u_2 \ , \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Chama-se a **soma parcial de ordem** n a

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- À sucessão (S_n) chama-se a **sucessão das somas parciais** da série.

- Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se **convergente** se a sucessão das somas parciais, (S_n), converge para um número real S (que se designa por **soma da série**).

  Escreve-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$$

- Uma série que não é convergente diz-se **divergente**.

- Duas **séries** dizem-se **da mesma natureza** se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.

Atenção:

À série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ temos associadas *duas sucessões*:

- (u_n), a partir da qual definimos a série;

- (S_n), a sucessão das suas somas parciais.

A natureza da série é determinada pela convergência ou não da sucessão das suas somas parciais.

O facto de (u_n) ser convergente *não garante* que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ seja convergente.

Exemplos:

1. Para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n$

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = n.\frac{1+n}{2}.$$

Como $\lim S_n = +\infty$, a série é divergente.

2. Para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

$$S_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Como (S_n) não tem limite, a série é divergente.

3. Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

pelo que a série é convergente e a sua soma é 2

Nota: Podemos também considerar séries indexadas em $\mathbf{N}_0$ ou $\mathbf{N}_p$, com $p \in \mathbf{N}$.

As definições e propriedades são análogas às das séries indexadas em $\mathbf{N}$.

Séries Importantes

Séries Geométricas

Chama-se **série geométrica de razão** r à série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + \cdots,$$

em que r é um número real.

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-r^n}{1-r} & , \quad \text{se } r \neq 1 \\ \\ n & , \quad \text{se } r = 1 \end{cases},$$

pelo que

- se $|r| < 1,$ a série geométrica é convergente e a sua soma é $S = \frac{1}{1-r}$;

- se $|r| \geq 1,$ a série geométrica é divergente.

Séries Redutíveis ou de Mengoli

As séries que se podem escrever na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+k}),$$

em que k é um número natural fixo, chamam-se **séries redutíveis**, **séries de Mengoli** ou ainda **séries telescópicas**.

Quando $k = 1$, a série é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$$

e

$$S_n = u_1 - u_{n+1}.$$

Assim, para $k = 1$:

- se u_n é convergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$ é convergente e a sua soma é $S = u_1 - \lim u_n$;
- se u_n é divergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$ é divergente.

Exemplos: São séries de Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right).$$

Séries de Dirichlet

Chama-se **série de Dirichlet** qualquer série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

com α um número real fixo.

- À série de Dirichlet para $\alpha = 1$

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

  chama-se **série harmónica**

A série harmónica é divergente pois:

- se $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ é convergente;
- se $\alpha \leq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ é divergente.

(Será justificado mais adiante)

Propriedades gerais das Séries

Proposição: Se, a partir de certa ordem, $u_n = v_n$, então $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza.

Ou seja, *a natureza de uma série não se altera modificando um número finito dos seus termos.*

No entanto a soma da série é, em geral, alterada.

Proposição: Se existe $p \in \mathbf{N}$ tal que, a partir de certa ordem, $u_n = v_{n+p}$, então as séries têm a mesma natureza.

Ou seja, *duas séries cujos termos gerais estejam apenas desfasados um certo número de termos, têm a mesma natureza.*

Definição: Seja $\sum u_n$ uma série convergente com soma S.

Chamamos **resto de ordem** p, com $p \in \mathbf{N}$, à soma da série que resulta de suprimir os p primeiros termos:

$$u_{p+1} + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n>p} u_n \ .$$

Então

$$R_p = S - S_p \ .$$

Observação: Pelo resultado anterior, a nova série também é convergente.

A sua soma é precisamente o erro que se comete quando se toma para soma da série $\sum u_n$ o valor da soma parcial S_p.

Proposição:

1. Se $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são duas séries convergentes, então a série

$$\sum(u_n + v_n) \text{ é convergente} \quad \text{e} \quad \sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n.$$

2. Se $\sum u_n$ é uma série convergente e $c \in \mathbf{R}$, então a série

$$\sum c u_n \text{ é convergente} \quad \text{e} \quad \sum c u_n = c \sum u_n.$$

Observação: Da alínea 2. resulta que *não se altera a natureza de uma série multiplicando o termo geral por uma constante diferente de zero*.

Proposição:

Se $\sum u_n$ é uma série convergente então $u_n \to 0$.

Ou seja,

$$\boxed{\text{se } (u_n) \text{ não tende para zero, então } \sum u_n \text{ é divergente.}}$$

<u>A afirmação recíproca é falsa</u>:

$$\boxed{u_n \to 0 \quad \underline{\underline{\text{não implica que}}} \quad \sum u_n \text{ é convergente.}}$$

Séries de Termos Não Negativos

Definição: Uma **série** $\sum u_n$ diz-se **de termos não negativos** se $u_n \geqslant 0$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$.

Nota: Neste caso, a sucessão (S_n) é crescente.

Proposição: (**Cond**. **Necessária e Suficiente de Convergência**)

Uma série de termos não negativos é convergente se e só se a sucessão das suas somas parciais é majorada.

Proposição: (**1º Critério da Comparação**)

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ séries de termos não negativos tais que

$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

Então:

- se $\sum v_n$ é convergente, $\sum u_n$ é convergente e $\sum u_n \leq \sum v_n$;
- se $\sum u_n$ é divergente, $\sum v_n$ é divergente.

Proposição: (**2º Critério de comparação**)

Sejam $\sum u_n$ uma série de termos não negativos e $\sum v_n$ uma série de termos positivos tais que $\frac{u_n}{v_n} \to L$.

Então:

- se $L \neq 0, +\infty$, as séries são da mesma natureza;
- se $L = 0$ e $\sum v_n$ é convergente, $\sum u_n$ também é convergente;
- se $L = +\infty$ e $\sum v_n$ é divergente, $\sum u_n$ também é divergente.

Proposição: (**Critério de Cauchy**)

Seja $\sum u_n$ é uma série de termos não negativos tal que

$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{u_n} = L$ (finito ou infinito).

Então:

- se $L < 1$, $\sum u_n$ é convergente;
- se $L > 1$, $\sum u_n$ é divergente;
- se $L = 1$, nada se pode concluir.

Recorde-se o

Corolário do Teorema da Média Geométrica:

se $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to a$ (com a finito ou infinito) então $\sqrt[n]{u_n} \to a$.

Proposição: (**Critério de D'Alembert**)

Seja $\sum u_n$ é uma série de termos positivos tal que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ (finito ou infinito).

Então:

- se $L < 1$, $\sum u_n$ é convergente;
- se $L > 1$, $\sum u_n$ é divergente;
- se $L = 1$, nada se pode concluir.

Proposição: (**Critério do Integral**)

Seja $f : [1,+\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente.

Para a sucessão de termo geral $u_n = f(n)$, tem-se que:

a série $\sum u_n$ é convergente

sse

o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ é convergente.

Corolário: A série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha \in \mathbf{R}$, é convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$.

Séries de Termos sem Sinal Fixo

Definição: Uma **série** diz-se de **termos sem sinal fixo** se possui infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.

Sendo $u_n > 0, \forall n \in \mathbf{N},$ a série (de termos sem sinal fixo)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots.$$

diz-se uma **série alternada**

Exemplo:

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ $\rightarrow$ **série harmónica alternada**.

Proposição: (**Critério de Dirichlet**)

Se a sucessão das somas parciais da série $\sum v_n$ é limitada e se (u_n) é uma sucessão decrescente com limite nulo, então a série $\sum u_n v_n$ é convergente.

Proposição: (**Critério de Leibniz**)

Se (u_n) é uma sucessão decrescente e com limite nulo, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é convergente.

Exemplo: A série harmónica alternada, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, é convergente.

Nota: No caso de uma série alternada nas condições do critério de Leibniz, temos uma majoração para o valor absoluto resto de uma certa ordem.

De facto, se $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é uma série alternada nas condições do critério de Leibniz, então

$$|R_p| \leq u_{p+1}.$$

Séries Absolutamente Convergentes

Definição: Uma série $\sum u_n$ diz-se **absolutamente convergente** se a série dos módulos

$$\sum |u_n|$$

é convergente.

Uma série diz-se **simplesmente convergente** se é convergente e não é absolutamente convergente.

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ é simplesmente convergente.

Proposição: Toda a série absolutamente convergente é convergente.

Nota:

Este resultado é consequência de, para qualquer $x \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq x + |x| \leq 2|x|.$$